

1 Quantificateurs

Exercice 1 ★ Vraies ou fausses –

Déterminer parmi les propositions suivantes lesquelles sont vraies :

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 167.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 167.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R}, x+1=0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R}, x+2=0)$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, (x+1 \neq 0 \text{ ou } x+2 \neq 0)$.
6. $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z-xy=0$;
7. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z-xy=0$;
8. $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z-xy=0$;
9. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$;
10. $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{R}, |a| < \varepsilon$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[469]

Exercice 2 ★★ Nier des assertions avec quantificateurs –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x-y| \leq \eta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[470]

Exercice 3 ★★★ Vraies ou fausses –

Soit n un entier naturel non nul. On note C_n la courbe d'équation $y = (1+x)^n$ et D_n la droite d'équation $y = 1+nx$.

1. Rappeler l'équation de la tangente à C_n au point A de C_n d'abscisse 0.
2. Tracer (par exemple à l'aide d'un logiciel) C_n et D_n lorsque $n = 2, 3$.
3. En vous aidant du graphique pour obtenir une conjecture, démontrer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n \geq 1+nx$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$; $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n = 1+nx$; $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, (1+x)^n = 1+nx$; $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, (1+x)^n > 1+nx$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n \geq 1+nx$;
5. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, (1+x)^n \geq 1+nx$;
6. $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^n = 1+nx$;
7. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, (1+x)^n = 1+nx$;
8. $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, (1+x)^n > 1+nx$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[471]

Exercice 4 ★★★ Du texte aux quantificateurs –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante;
2. f n'est pas constante;
3. f s'annule;
4. f est périodique.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[467]

Exercice 5 ★★★★★ Du quantificateur au texte –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Énoncer en langage courant les assertions suivantes écrites à l'aide de quantificateurs. Peut-on trouver une fonction qui satisfait cette assertion ? Qui ne la satisfait pas ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(x + T)$;
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y = f(x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[468]

Exercice 6 ★★★★★ Limites de validité d'une proposition –

Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :

$$\forall y \in [0, 1], x \geq y \implies x \geq 2y.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[472]

Exercice 7 ★★★★★ Une proposition sur les fonctions –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition p suivante :

$$p = (\exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < t).$$

1. Écrire la négation de p .
2. Donner un exemple de fonction f qui vérifie p ; un exemple qui ne vérifie pas p .
3. Parmi les propositions ci-dessous, déterminer celles qui sont équivalentes à p , celles qui sont toujours vraies, celles qui sont toujours fausses, et celles pour lesquelles on ne peut rien dire.

$p_1 = (\exists x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) < x)$; $p_2 = (\exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(t) < x)$; $p_3 = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < t)$;
 $p_4 = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(t) < x)$.

4. $p_1 = (\exists x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, f(t) < x)$;
5. $p_2 = (\exists t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(t) < x)$;
6. $p_3 = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < t)$;
7. $p_4 = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(t) < x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2588]

2 Raisonnement par l'absurde

Exercice 8 ★ Corps de nombres –

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m = p \text{ et } n = q).$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[473]

Exercice 9 ★ Principe des tiroirs –

Démontrer que si vous rangez $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[474]

Exercice 10 ★★★★★ Nombres dans un intervalle –

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels x_0, x_1, \dots, x_n de $[0, 1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).
4. Donnez-en une preuve en utilisant le principe des tiroirs.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[475]

3 Raisonnement par contraposée

Exercice 11 ★ Somme de rationnels et d'irrationnels –

Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante : si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

1. Quelle est la contraposée de cette proposition ?
2. Démontrer la proposition.
3. Est-ce que la réciproque de cette proposition est toujours vraie ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2863]

Exercice 12 ★ Pair/impair –

Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

A-t-on démontré la proposition initiale ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[476]

Exercice 13 ★★ Divisibilité par 8 –

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[477]

4 Raisonnement par récurrence

Exercice 14 ★ Pour se mettre en confiance... –

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[478]

Exercice 15 ★★ Limite de validité –

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété suivante :

$$P_n : 2^n > n^2.$$

1. Montrer que l'implication $P_n \implies P_{n+1}$ est vraie pour $n \geq 3$.
2. Pour quelles valeurs de n la propriété P_n est vraie ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[479]

Exercice 16 ★★☆☆ **Plusieurs paramètres ? –**

On souhaite démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > -1$, on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

1. La récurrence porte-t-elle sur n ? Sur x ? Sur les deux ?
2. Énoncer l'hypothèse de récurrence.
3. Vérifier que $(1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2$.
4. Rédiger la démonstration.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[480]

Exercice 17 ★★★★★ **Décomposition du nombre 1 –**

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on peut trouver n entiers strictement positifs x_1, \dots, x_n , deux à deux distincts, tels que

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2433]

Exercice 18 ★★☆☆ **Une récurrence double –**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 2^n$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2792]

Exercice 19 ★★★★★ **Simple ou double ? –**

On considère la suite (u_n) (suite de Fibonacci) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. Démontrer que la suite (u_n) vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n$. Avez-vous utilisé une récurrence simple ou une récurrence double ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2414]

Exercice 20 ★★★★★ **Une décomposition des entiers –**

Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ où $(p, q) \in \mathbb{N}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[482]

Exercice 21 ★★★★★ **Une décomposition des entiers –**

Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[483]

5 Raisonnement par disjonction de cas

Exercice 22 ★★☆☆ **Une inégalité –**

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2400]

Exercice 23 ★★☆☆ **Produit de nombres qui ne sont pas divisibles par 3 –**

Le but de l'exercice est de démontrer que le produit de deux nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 3 n'est pas divisible par 3.

1. Soit n un entier. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de n par 3 ?
2. En déduire que si n n'est pas divisible par 3, alors n s'écrit $3k+1$ ou $3k+2$, avec k un entier. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soit n un entier s'écrivant $3k+1$ et m un entier s'écrivant $3l+1$. Vérifier que

$$n \times m = 3(3kl + k + l) + 1.$$

En déduire que $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

4. Démontrer la propriété annoncée par l'exercice.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2672]

Exercice 24 Reste dans la division par quatre d'une somme de deux carrés –

Démontrer que si n est la somme de deux carrés, alors le reste de la division euclidienne de n par 4 est toujours différent de 3.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2399]

6 Raisonnement par analyse/synthèse

Exercice 25 Une équation avec des racines carrées –

Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2401]

Exercice 26 Une équation fonctionnelle –

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x. \quad (1)$$

1. On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente. Que vaut $f(0)$? $f(1)$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
3. Quelles sont les fonctions f solution du problème ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2581]

Exercice 27 Une équation fonctionnelle –

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2402]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Reprenez votre cours de lycée !
 - 2.
 3. En vous aidant du graphique pour obtenir une conjecture, démontrer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.
Faux. Vrai. Vrai. Vrai. Vrai.
 4. Faux.
 5. Vrai.
 6. Vrai.
 7. Vrai.
 8. Vrai.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

Indication pour l'exercice 5 ▲

Indication pour l'exercice 6 ▲

Séparer en 4 cas : $x \geq 2$, $x \in]0, 2[$ et $x = 0$ et $x < 0$.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Indication pour l'exercice 8 ▲

1. Reasonner par l'absurde.
 2. Il s'agit de faire une double implication.
-

Indication pour l'exercice 9 ▲

Raisonnement par l'absurde.

Indication pour l'exercice 10 ▲

Indication pour l'exercice 11 ▲

- 1.
 2. Démontrer la contraposée.
 3. Trouver un contre-exemple.
-

Indication pour l'exercice 12 ▲

Indication pour l'exercice 13 ▲

Indication pour l'exercice 14 ▲

Indication pour l'exercice 15 ▲

Indication pour l'exercice 16 ▲

Indication pour l'exercice 17 ▲

Procéder par récurrence sur n . Pour le passage du rang n au rang $n + 1$, on pourra commencer par écrire $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, puis décomposer $1/2$.

Indication pour l'exercice 18 ▲

Procéder par récurrence double.

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. Procéder par récurrence double.
 2. Une récurrence simple suffit.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

Pour l'existence, procéder par récurrence forte.

Indication pour l'exercice 21 ▲

Procéder par récurrence forte sur n .

Indication pour l'exercice 22 ▲

Séparer les cas $x \geq 1$ et $x < 1$.

Indication pour l'exercice 23 ▲

- 1.
 - 2.
 3. Utiliser la propriété réciproque démontrée à la question précédente.
 4. Choisir deux nombres n et m non divisibles par 3 et les écrire suivant la propriété précédente. Raisonner ensuite par disjonction de cas. Par exemple, si n s'écrit $3k + 1$ et m s'écrit $3l + 1$, puis si n s'écrit $3k + 1$ et m s'écrit $3l + 2$... Il y a 4 cas à traiter. S'inspirer de la question précédente pour démontrer la non-divisibilité par 3.
-

Indication pour l'exercice 24 ▲

Écrire $n = a^2 + b^2$, et raisonner suivant la parité de a et b .

Indication pour l'exercice 25 ▲

Raisonner par analyse-synthèse en donnant des conditions nécessaires que x doit vérifier, puis en démontrant que ces conditions sont suffisantes.

Indication pour l'exercice 26 ▲

- 1.
2. Obtenir un système linéaire de deux équations à deux inconnues, $f(x)$ et $f(1 - x)$.
- 3.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Raisonnement par analyse-synthèse, et commencer par déterminer $f(0)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Cette proposition est fausse, car 2 ne divise pas 167.
 2. Cette proposition est vraie, car 136 est un multiple de 17.
 3. Cette proposition est fausse, car x devrait être simultanément égal à -1 et à -2.
 4. Cette proposition est vraie car $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 1 = 0)$ est vraie (il suffit de prendre $x = -1$) et de la même façon $(\exists x \in \mathbb{R}, x + 2 = 0)$ est vraie (il suffit de prendre $x = -2$).
 5. Cette proposition est vraie, par exemple car il s'agit de la négation de la proposition 3, qui est fausse.
 6. Cette assertion est fausse. Si on considère x n'importe quel réel non nul, alors le choix de $y = 1$ et de $z = 2x$ fait que z est différent de xy .
 7. Cette assertion est fausse. Prenons n'importe quel y dans \mathbb{R}^* . On voudrait trouver x dans \mathbb{R}^* tel que, pour tout z dans \mathbb{R}^* , on ait $z = xy$. Bien sûr, ce n'est pas possible, car le x que l'on choisit devrait convenir à toute valeur de z , ce qui n'est pas possible car il suffit de considérer un z différent de xy .
 8. Cette assertion est vraie, car on peut choisir x une fois y et z fixés. On choisit alors $x = z/y$.
 9. L'assertion est vraie, il suffit de prendre $a = 0$ (convient pour toute valeur de $\varepsilon > 0$).
 10. Cette assertion est "évidemment" vraie car elle est plus faible que la précédente (on peut choisir a après $\varepsilon > 0$).
-

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
 2. $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M$.
 3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $x > 0$.
 4. $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
-

Correction de l'exercice 3 ▲

1. D'après le cours de lycée, l'équation de la tangente au point A de coordonnée $(0, 1)$ est $y = 1 + nx$.
 - 2.
 3. C'est faux, par exemple si $n = 3$ et $x = -4$. C'est vrai. Il y a plusieurs façons de démontrer cela. La plus facile est d'étudier la fonction $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx)$ sur $[0, +\infty[$. On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton. C'est vrai : $n = 1$ convient. C'est vrai : prendre $x = 0$. C'est vrai : prendre $n = 2$, car $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ si $x \neq 0$.
 4. C'est faux, par exemple si $n = 3$ et $x = -4$.
 5. C'est vrai. Il y a plusieurs façons de démontrer cela. La plus facile est d'étudier la fonction $f(x) = (1 + x)^n - (1 + nx)$ sur $[0, +\infty[$. On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton.
 6. C'est vrai : $n = 1$ convient.
 7. C'est vrai : prendre $x = 0$.
 8. C'est vrai : prendre $n = 2$, car $(1 + x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ si $x \neq 0$.
-

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On peut l'écrire sous la forme : $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$; une autre écriture possible est $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$.
 2. Si on nie l'assertion précédente, on trouve $\forall C \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq C$. Si on nie la seconde, on trouve $\exists x, y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$.
 3. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$;
 4. $\exists T \in \mathbb{R}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.
-

Correction de l'exercice 5 ▲

1. f n'admet pas de maximum. Par exemple, $f(x) = x$ satisfait cette assertion. $f(x) = \sin x$ ne satisfait pas cette assertion.
2. Toute fonction vérifie cette assertion, il suffit de prendre $T = 0$.
3. Toutes les valeurs de f sont prises au moins deux fois. $f(x) = \sin x$ est un exemple de fonctions vérifiant cette assertion, $f(x) = x$ un contre-exemple.

4. Cette assertion est absurde, car elle signifierait qu'il existe un réel x tel que $f(x)$ prenne toutes les valeurs réelles possibles. Aucune fonction ne satisfait cette assertion.

Correction de l'exercice 6 ▲

On sépare en 4 cas :

1. $x \geq 2$. Alors, pour tout $y \in [0, 1]$, les propositions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont vraies. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

2. $x < 0$. Alors, pour tout $y \in [0, 1]$, les propositions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont fausses. D'après la table de vérité de l'implication, l'assertion est vraie.

3. $x \in]0, 2[$. On peut alors trouver un réel $y \in [0, 1]$ tel que $2y > x$ et $x \geq y$. En effet, $x/2 \in]0, 1[$ et il suffit de choisir $x/2 < y < \min(1, x)$. Dans ce cas, $x \geq y$ est vraie et $x \geq 2y$ est fausse. L'assertion est fausse.

4. Si $x = 0$, alors les assertions $x \geq y$ et $x \geq 2y$ sont ou bien simultanément fausses (lorsque $y \in]0, 1[$), ou bien simultanément vraies. L'assertion est donc vraie.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. On a

$$\text{non } p = (\forall t \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq t).$$

2. La proposition p signifie que la fonction f est majorée. Elle est vérifiée par exemple si $f(x) = \sin(x)$. Il suffit de choisir $t = 2$. Elle n'est pas vérifiée par la fonction $f(x) = x$. Sinon, il existerait $t \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < t$. Cela ne fonctionne pas avec $x = t + 1$.

3. p_1 est équivalente à p : en effet, les variables x et t sont muettes, on peut les échanger ! p_2 est toujours fausse : pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$, si on choisit $x = f(t) - 1$, on n'a pas $f(t) < x$. p_3 n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse. Elle est vraie pour $f(x) = x$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, si on choisit $x = t - 1$, on a bien $f(x) < t$. Elle est fausse pour $f(x) = x^2$: si on choisit $t = -1$, il est impossible de trouver $x \in \mathbb{R}$ avec $x^2 < -1$. De plus, p_3 n'est pas équivalente à p car la fonction $f(x) = x$ vérifie p_3 mais pas p . p_4 est toujours vraie : pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$, si je choisis $x = f(t) + 1$, j'ai bien $f(t) < x$.

4. p_1 est équivalente à p : en effet, les variables x et t sont muettes, on peut les échanger !

5. p_2 est toujours fausse : pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$, si on choisit $x = f(t) - 1$, on n'a pas $f(t) < x$.

6. p_3 n'est ni toujours vraie, ni toujours fausse. Elle est vraie pour $f(x) = x$: pour tout $t \in \mathbb{R}$, si on choisit $x = t - 1$, on a bien $f(x) < t$. Elle est fausse pour $f(x) = x^2$: si on choisit $t = -1$, il est impossible de trouver $x \in \mathbb{R}$ avec $x^2 < -1$. De plus, p_3 n'est pas équivalente à p car la fonction $f(x) = x$ vérifie p_3 mais pas p .

7. p_4 est toujours vraie : pour n'importe quel $t \in \mathbb{R}$, si je choisis $x = f(t) + 1$, j'ai bien $f(t) < x$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $a + b\sqrt{2} = 0$ sans que $a = b = 0$. Alors, nécessairement $b \neq 0$ car si $b = 0$ alors on devrait aussi avoir $a = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(a, b) \neq (0, 0)$. Mais alors, on a $\sqrt{2} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. L'hypothèse de départ est donc fausse, et on a $a = b = 0$.

2. D'une part, si $m = p$ et $n = q$, alors $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$. Réciproquement, supposons que $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2}$. Alors on a aussi

$$(m - p) + (n - q)\sqrt{2} = 0.$$

Le résultat de la question précédent nous dit que $m - p = 0$ et que $n - q = 0$, soit encore $m = p$ et $n = q$.

Correction de l'exercice 9 ▲

On va faire un raisonnement par l'absurde. Supposons que tous les tiroirs contiennent au plus une paire de chaussettes. Alors il y aura au plus $1 + 1 + \dots + 1 = n$ paires de chaussettes, ce qui contredit qu'il y en a $(n + 1)$. Donc un tiroir contient au moins deux paires de chaussettes.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. La traduction immédiate de la propriété est :

$$\exists (i, j) \in \{0, \dots, n\}^2, (i < j) \text{ et } (x_j - x_i \leq 1/n).$$

Pour utiliser simplement les valeurs $x_i - x_{i-1}$, il suffit de remarquer que si deux nombres sont distants de moins de $1/n$, alors il y aura deux nombres consécutifs qui seront distants de moins de $1/n$. Ceci signifie :

$$\exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} \leq 1/n.$$

2. Le contraire de cette assertion est donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} > 1/n.$$

3. Supposons la propriété de l'exercice fausse, c'est-à-dire que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} > 1/n.$$

En écrivant

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$$

on a donc, en utilisant la propriété précédente :

$$x_n - x_0 > n \times \frac{1}{n} = 1.$$

C'est absurde. La propriété initiale est donc vraie.

4. On considère les n intervalles $I_1 = [0, 1/n[$, $I_2 = [1/n, 2/n[$, ..., $I_n = [(n-1)/n, 1]$ (qui correspondent si l'on veut à n tiroirs). On veut y placer $(n+1)$ points (les chaussettes !). Il faut obligatoirement qu'il y ait deux points dans le même intervalle. Ces deux points seront distants de moins de $1/n$. Bien sûr, le principe des tiroirs se démontre aussi à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. La contraposée de cette proposition est : si a et b sont rationnels, alors $a + b$ est rationnel.

2. On va démontrer la contraposée, ce qui va prouver la proposition. On suppose donc que a et b sont rationnels. Ils s'écrivent alors $a = \frac{p}{q}$ et $b = \frac{p'}{q'}$, avec p, p', q, q' des entiers relatifs, et q, q' non nuls. On calcule $a + b$ en réduisant au même dénominateur :

$$a + b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'}.$$

Le nombre $a + b$ est le quotient de deux entiers, c'est un rationnel.

3. La réciproque de la proposition est : si a ou b sont irrationnels, alors $a + b$ est irrationnel. Ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, si $a = \sqrt{2}$ et $b = -\sqrt{2}$, alors a ou b sont irrationnels (en réalité, on a même a et b qui sont irrationnels), et pourtant $a + b$ n'est pas irrationnel. On prendra bien garde ici à la signification du "ou" en mathématiques.

Correction de l'exercice 12 ▲

La contraposée de la proposition est : si n est pair, alors n^2 est pair. Démontrons cela. Si n est pair, alors il s'écrit $2k$ où k est un autre entier. Mais alors n^2 s'écrit $(2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ et est donc pair. Par le principe de contraposition, on a démontré la proposition de l'énoncé.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Si n est impair, alors $n^2 - 1$ est divisible par 8.

2. Prenons n un entier impair. n s'écrit donc $2l + 1$ où l est un entier. Si l est pair, $l = 2k$ et donc $n = 4k + 1$. Si l est impair, $l = 2k + 1$ et donc $n = 4k + 3$. Dans tous les cas, on a donc $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{1, 3\}$. On passe au carré :

$$n^2 - 1 = (4k + r)^2 - 1 = 16k^2 + 8kr + r^2 - 1 = 8(2k^2 + kr) + r^2 - 1.$$

Or, si $r = 1$, $r^2 - 1 = 0$ et $n^2 - 1$ est divisible par 8. Si $r = 3$, $r^2 - 1 = 8$ et $n^2 - 1$ est aussi divisible par 8.

3. Par le principe de contraposition, oui !

Correction de l'exercice 14 ▲

On va procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la propriété $\mathcal{P}(n) = "2^{n-1} \leq n! \leq n^n"$. $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée, puisque $2^0 = 1! = 1^1 = 1$. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On commence par prouver l'inégalité de gauche. On remarque d'abord que, puisque $n \geq 1$, on a $2 \leq n+1$ d'où l'on déduit

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leq 2 \times n! \leq (n+1) \times n! \leq (n+1)!$$

Pour l'inégalité de droite, on part de l'hypothèse de récurrence et on multiplie par $(n+1)$, pour obtenir

$$(n+1)! \leq (n+1)n^n.$$

Or, $n \leq n+1$ et donc $n^n \leq (n+1)^n$. On en déduit que

$$(n+1)! \leq (n+1) \times (n+1)^n = (n+1)^{n+1}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vérifiée, ce qui prouve, par récurrence, l'inégalité voulue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Soit $n \geq 3$ tel que P_n est vraie. On a alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2.$$

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2 \iff n^2 - 2n - 1 \geq 0$. On calcule le discriminant de ce dernier polynôme, on fait son tableau de signes et on s'aperçoit qu'il est toujours positif pour $n \geq 3$. Ceci montre bien P_{n+1} .

2. Il faut faire attention, car P_3 est fausse ! On ne peut donc pas en déduire que P_n est vraie pour $n \geq 3$. D'ailleurs, P_4 est fausse, mais P_5 est vraie. Par le principe de récurrence, P_n est vraie pour $n \geq 5$. Pour les premières valeurs de n , on constate également que P_0 et P_1 sont vraies.

Correction de l'exercice 16 ▲

1. La récurrence ne peut porter que sur un seul paramètre, entier de surcroît. Elle porte donc sur n .

2. P_n : Pour tout $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

3. Vérification immédiate en développant.

4. Initialisation : Montrons que P_0 est vraie. Soit $x > -1$. On a

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$$

ce qui prouve bien P_0 . Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ telle que P_n vraie et prouvons P_{n+1} . Soit $x > -1$. On a

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

cette dernière inégalité provenant du fait que P_n est vraie et que $1+x > 0$ puisque $x > -1$. On en déduit que

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

puisque $nx^2 \geq 0$. On peut en fait rédiger cette récurrence de deux façons différentes : comme on l'a fait ci-dessus, en mettant le quantificateur portant sur x dans l'hypothèse de récurrence P_n . Il faut alors bien prendre garde que dans la phase d'initialisation et celle d'hérédité, il faut commencer par "soit $x > -1$ ". On peut aussi choisir de fixer $x > -1$ avant la récurrence, et de travailler avec ce $x > -1$ fixé. L'hypothèse de récurrence devient $Q_n : (1+x)^n \geq 1+nx$, et dans les phases d'initialisation et d'hérédité, il faut supprimer la phrase "Soit $x > -1$."

Correction de l'exercice 17 ▲

Pour $n \geq 3$, notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : “Il existe n entiers strictement positifs x_1, \dots, x_n , deux à deux distincts, tels que $\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1$ ”. Prouvons par récurrence que pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Initialisation : On a

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \geq 3$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons $\mathcal{P}(n+1)$. Il existe des entiers strictement positifs et deux à deux distincts x_1, \dots, x_n tels que

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

On peut toujours supposer que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Il est alors facile de remarquer que l'on a forcément $x_1 \geq 2$ (puisque $\frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} > 0$, x_1 ne peut pas être égal à 1). On écrit alors

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2x_1} + \dots + \frac{1}{2x_n} \\ &= \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \dots + \frac{1}{y_{n+1}} \end{aligned}$$

en ayant posé $y_1 = 2$ et $y_k = 2x_{k-1}$ pour $k = 2, \dots, n+1$. On a alors

$$y_1 = 2 < 4 \leq 2x_1 = y_2 < y_3 < \dots < y_{n+1}.$$

La propriété est donc démontrée au rang $n+1$. Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 3$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Correction de l'exercice 18 ▲

On va démontrer ce résultat par récurrence. Comme la formule de récurrence porte sur deux termes de la suite, nous allons effectuer une récurrence double. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété “ $u_n = 1 + 2^n$ ”. Initialisation : On a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. On a aussi $u_1 = 3 = 1 + 2^1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies. Alors on a

$$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

Puisque $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \\ &= 3 + 3 \cdot 2^{n+1} - 2 - 2 \cdot 2^n \\ &= 1 + 6 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^n \\ &= 1 + 4 \cdot 2^n \\ &= 1 + 2^{n+2}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. En conclusion, par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

Correction de l'exercice 19 ▲

1. On va procéder par récurrence double. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété “ $u_n \geq n$ ”. Initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$ et $u_1 = 1 \geq 1$: les propriétés $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées. Prouvons alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Pour cela, on remarque que

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq n+1 + n \geq n+1 + 1 = n+2$$

à condition que $n \geq 1$ et non $n \in \mathbb{N}!!!$ Pour ne pas faire d'erreurs, il faut donc ici initialiser la propriété jusque $\mathcal{P}(2)$, puis faire l'étape d'hérédité à partir de $n \geq 1$. Reprenons donc une rédaction correcte. Initialisation : $u_0 = 1 \geq 0$, $u_1 = 1 \geq 1$, $u_2 = 1 + 1 = 2 \geq 2$: les propriétés $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vérifiées. Hérédité : Soit $n \geq 1$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées. Prouvons alors que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie. Pour cela, on remarque que

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \geq n+1 + n \geq n+1 + 1 = n+2.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vérifiée. Conclusion : par le principe de récurrence double, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

2. Ici, une récurrence simple suffit ! Notons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}(n) : "u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n".$$

Initialisation :

$$u_0 u_2 - u_1^2 = 2 - 1 = 1 = (-1)^0$$

donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, et prouvons $\mathcal{Q}(n+1)$. On a, en remplaçant u_{n+3} et un des termes de u_{n+2} par leur expression utilisant la formule de récurrence de (u_n) ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} u_{n+3} - u_{n+2}^2 &= u_{n+1} (u_{n+2} + u_{n+1}) - u_{n+2} (u_{n+1} + u_n) \\ &= u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Par le principe de récurrence, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 20 ▲

On va prouver l'existence par récurrence forte. Le résultat est en effet vrai pour $n = 1$, il suffit de prendre $p = q = 0$. Supposons maintenant que tout entier inférieur ou égal à $n-1$ vérifie cette propriété, et prouvons qu'elle est encore vérifiée pour n . On distingue alors deux cas :

1. ou bien n est pair : dans ce cas, $n = 2m$, et $m \in \{1, \dots, n-1\}$. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, et donc m s'écrit $m = 2^a(2b+1)$, avec $a, b \in \mathbb{N}$. Mais alors $n = 2^{a+1}(2b+1)$, et donc l'existence est démontrée avec $p = a+1$ et $q = b$.

2. ou bien n est impair : alors $n = 2m+1 = 2^0(2m+1)$, et la proposition est démontrée pour $p = 0$ et $q = m$. Ainsi, l'existence de la décomposition est établie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Prouvons désormais l'unicité. Supposons que $n = 2^p(2q+1) = 2^a(2b+1)$. Si $p \geq a$, alors $2^{p-a}(2q+1) = 2b+1$ et le terme de droite est impair. Celui de gauche l'est aussi, et donc $p = a$. On en déduit donc que $q = b$ également, ce qui prouve l'unicité.

Correction de l'exercice 21 ▲

On va procéder par récurrence forte sur n . La propriété est vraie pour $n = 1$, puisqu'on peut alors écrire $1 = 2^0$. Soit $n \geq 2$ et supposons la propriété vraie pour tous les entiers inférieurs stricts à n . Si n est pair, alors $n = 2m$ et m s'écrit comme somme de puissances de 2 toutes distinctes, $m = 2^{p_1} + \dots + 2^{p_r}$. Alors $n = 2^{p_1+1} + \dots + 2^{p_r+1}$ s'écrit aussi comme somme de puissances de 2 toutes distinctes. Si n est impair, alors $n-1 = 2m$ est pair. m s'écrit à nouveau $m = 2^{p_1} + \dots + 2^{p_r}$, où les p_i sont tous différents. Mais alors,

$$n = 1 + 2m = 2^0 + 2^{p_1+1} + \dots + 2^{p_r+1}$$

s'écrit bien comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Correction de l'exercice 22 ▲

La difficulté de l'exercice vient du fait que la valeur absolue a deux expressions distinctes suivant le signe de la quantité à l'intérieur. Ceci nous incite à raisonner par disjonction de cas.

Si $x \leq 1$, alors $x-1 \leq 0$ et $|x-1| = 1-x$. On doit alors démontrer que, si $x \leq 1$, on a $1-x \leq x^2 - x + 1$. Étudions donc le signe du trinôme

$$P(x) = x^2 - x + 1 - (1-x) = x^2 \geq 0.$$

La propriété est vraie si $x \leq 1$. Si $x \geq 1$, alors $x - 1 \geq 0$ et $|x - 1| = x - 1$. On doit alors démontrer que, si $x \geq 1$, on a $x - 1 \leq x^2 - x + 1$. Étudions donc le signe du trinôme

$$Q(x) = x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 0.$$

La propriété est donc vraie si $x \geq 1$.

En conclusion, la propriété est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Les restes possibles sont 0, 1 ou 2.

2. Écrivons la division euclidienne de n par 3 : $n = 3k + a$, avec k un entier, et $a \in \{0, 1, 2\}$. Puisque n n'est pas divisible par 3, a est non nul et donc $a = 1$ ou $a = 2$. Réciproquement, si $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, on a écrit la division euclidienne de n par 3. Comme le reste est non nul, c'est bien que n n'est pas divisible par 3.

3. Un simple calcul donne

$$n \times m = (3k + 1)(3l + 1) = 9kl + 3k + 3l + 1 = 3(3kl + k + l) + 1.$$

Par la propriété réciproque démontrée à la question précédente, $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

4. Considérons deux entiers n et m qui ne sont pas divisibles par 3. Alors il existe deux entiers k et l tels que n s'écrit $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$, et m s'écrit $3l + 1$ ou $3l + 2$. On raisonne ensuite par disjonction de cas :

Si $n = 3k + 1$ et $m = 3l + 1$, alors on vient de prouver que $n \times m$ n'est pas divisible par 3. Si $n = 3k + 1$ et $m = 3l + 2$, alors

$$n \times m = (3k + 1)(3l + 2) = 9kl + 6k + 3l + 2 = 3(3kl + 2k + l) + 2.$$

Ainsi, dans ce cas $n \times m$ n'est pas divisible par 3. Si $n = 3k + 2$ et $m = 3l + 1$, alors

$$n \times m = (3k + 2)(3l + 1) = 9kl + 3k + 6l + 2 = 3(3kl + k + 2l) + 2.$$

Ainsi, dans ce cas $n \times m$ n'est pas divisible par 3. Si $n = 3k + 2$ et $m = 3l + 2$, c'est un petit peu plus difficile... L'astuce consiste à écrire que $4 = 3 + 1$:

$$\begin{aligned} n \times m &= (3k + 2)(3l + 2) \\ &= 9kl + 6k + 6l + 4 \\ &= 9kl + 6k + 6l + 3 + 1 \\ &= 3(3kl + 2k + 2l + 1) + 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

On a traité tous les cas, et on a donc prouvé que le produit de deux nombres qui ne sont pas divisibles par 3 n'est jamais divisible par 3.

5. Si $n = 3k + 1$ et $m = 3l + 1$, alors on vient de prouver que $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

6. Si $n = 3k + 1$ et $m = 3l + 2$, alors

$$n \times m = (3k + 1)(3l + 2) = 9kl + 6k + 3l + 2 = 3(3kl + 2k + l) + 2.$$

Ainsi, dans ce cas $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

7. Si $n = 3k + 2$ et $m = 3l + 1$, alors

$$n \times m = (3k + 2)(3l + 1) = 9kl + 3k + 6l + 2 = 3(3kl + k + 2l) + 2.$$

Ainsi, dans ce cas $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

8. Si $n = 3k + 2$ et $m = 3l + 2$, c'est un petit peu plus difficile... L'astuce consiste à écrire que $4 = 3 + 1$:

$$\begin{aligned} n \times m &= (3k + 2)(3l + 2) \\ &= 9kl + 6k + 6l + 4 \\ &= 9kl + 6k + 6l + 3 + 1 \\ &= 3(3kl + 2k + 2l + 1) + 1. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $n \times m$ n'est pas divisible par 3.

Correction de l'exercice 24 ▲

On écrit $n = a^2 + b^2$, et on raisonne suivant la parité de a et de b :

Si a et b sont tous les deux pairs, alors $a = 2k$ et $b = 2\ell$, $n = 4(k^2 + \ell^2)$ est divisible par 4 : la propriété est vraie. Si a est pair et b est impair, alors $a = 2k$ et $b = 2\ell + 1$. Alors $n = 4k^2 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4(k^2 + \ell^2 + \ell) + 1$. Le reste de la division de n par 4 sera égal à 1. La propriété est vraie dans ce cas. Le cas a impair et b pair est symétrique. Si a est impair et b est impair, alors $a = 2k + 1$, $b = 2\ell + 1$ et $n = 4k^2 + 4k + 1 + 4\ell^2 + 4\ell + 1 = 4(k^2 + k + \ell^2 + \ell) + 2$. Le reste de la division de n par 4 sera égal à 2. La propriété est vraie dans ce cas.

Ainsi, dans tous les cas, la propriété est vraie. Ce raisonnement par disjonction de cas est particulièrement utile en arithmétique, en particulier lorsqu'on utilise l'outil des congruences.

Correction de l'exercice 25 ▲

On va raisonner par analyse-synthèse. Analyse : Imaginons que x soit une solution de cette équation. Alors il est déjà clair que $x \in]-\infty, 2]$, sinon la racine carrée n'aurait pas de sens. On doit aussi avoir $x \geq 0$, car la racine carrée est positive et donc $x \in [0, 2]$. Élevons ensuite l'équation au carré. Si x est solution, alors $2 - x = x^2$ (on a bien ici simplement une implication, pas une condition nécessaire et suffisante !), c'est-à-dire $x^2 + x - 2 = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$. Seul x_1 est dans l'intervalle $[0, 2]$. Donc la seule solution possible est 1. Synthèse : Prouvons que $x = 1$ est solution de l'équation. C'est presque évident, car $\sqrt{2-1} = 1$. Conclusion : la seule solution de l'équation est 1.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. Choisissons $x = 0$ dans la relation. On a alors $f(0) = 1$. Choisissons ensuite $x = 1$ dans la relation. On a alors $f(1) + 1f(0) = 2$ qui donne $f(1) = 1$.

2. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) + xf(1-x) = 1+x.$$

Si on substitue $1-x$ à x dans cette relation, on trouve que

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2-x.$$

On a donc un système de deux équations à deux inconnues qui va nous permettre de déterminer $f(x)$ et $f(1-x)$. Si on multiplie la deuxième équation par x , on trouve :

$$x(1-x)f(x) + xf(1-x) = 2x - x^2.$$

On lui retranche la première équation et on trouve :

$$(x(1-x) - 1)f(x) = -x^2 + x - 1 \implies (-x^2 + x - 1)f(x) = -x^2 + x - 1.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x^2 + x - 1 \neq 0$. En effet, le discriminant de l'équation $-x^2 + x - 1 = 0$ vaut $\Delta = -3 < 0$. Ainsi, on peut simplifier par $-x^2 + x - 1$ et on trouve que $f(x) = 1$.

3. On a démontré que si f est solution, alors f est la fonction constante égale à 1. Réciproquement, la fonction constante égale à 1 est solution. On en déduit que l'ensemble des solutions est constitué par cette fonction.

Correction de l'exercice 27 ▲

On va raisonner par analyse-synthèse en déterminant des conditions nécessaires sur f pour vérifier cette équation, puis en vérifiant que ces conditions sont suffisantes.

Analyse : soit f une fonction vérifiant cette équation. Alors, choisissant $x = y = 0$, on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$, ce qui entraîne $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$. Choisisant ensuite $x = 1$ et $y = 0$, on a $f(1)f(0) - f(0) = 1$, ce qui interdit $f(0) = 0$. On a donc $f(0) = 1$ (et aussi $f(1) = 2$). Enfin, fixant $y = 0$, on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

on a $f(x) = x + 1$. On a donc prouvé que si f est solution de l'équation, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
Synthèse : réciproquement, considérons la fonction f définie par $f(x) = x + 1$. Alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) \times f(y) = (x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$$

et

$$f(xy) = xy + 1$$

ce qui prouve bien que f est solution de l'équation.

En conclusion, l'équation admet une solution unique : la fonction f donné par $f(x) = x + 1$.
